מבחן באלגברה 1 מ' 104016

חורף תש"ע 2009/10

מועד א'

מספר סטודנט:		פקולטה:	

- משך הבחינה 3 שעות.
- במבחן 5 שאלות. יש לפתור את כל 5 השאלות ולנמק היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב!
- אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון.
- שאלת שיעורי הבית היא 5 ב' (10 נקודות).

בהצלחה!

שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	
שאלה 5	

שאלת ש"ב

ציון	

<u>שאלה מס. 1</u> (25 נקודות)

יהי V מרחב המטריצות הממשיות 2 x 2 ותהי $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. תהי T

הטרנספורמציה הלינארית המוגדרת ע"י $\mathrm{T}(A)=BA-AB$, לכל A ב- V.

א. רשום את המטריצה המייצגת $[T]_E$ של T לפי הבסיס הסטנדרטי

$E=(E_1,E_2,E_3,E_4)$ כאשר:

$$E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad E_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad E_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad E_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ב. יהי $F=(F_1,F_2,F_3,F_4)$ בסיס של V כאשר:

$$F_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad,\quad F_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad F_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad,\quad F_4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

חשב את מטריצת המעבר מ- E ל- F.

ג. רשום את $[T]_F$ - המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסדור F.

ד. נתון ש- $[X]_F=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, עבור X מסוים ב- V. מצא את $[T(X)]_E$.

ה. האם $V=\mathrm{Im}(T)\oplus\ker(T)$?

ריכוז תשובות

א. $[T]_E =$

ב. מטריצת המעבר מ- E ל- F:

ג. $[T]_F =$

ד. $[T(X)]_E =$

ה.

כן	לא

<u>שאלה מס. 2</u> (25 נקודות)

נתונה מטריצה ממשית A, 3×3 ע"י $a\in\mathbb{R}$ $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ a & 2a & 3a\end{pmatrix}$

א. מצא את כל ערכי a עבורם A ניתנת לליכסון.

בסעיפים ב' – ו' נניח ש- $a=1$.

ב. מצא את הפולינום האופייני של A.

ג. הוכח ש- A-8I היא מטריצה לא הפיכה (סינגולרית).

ד. חשב את הערכים העצמיים של A, מצא את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של כל אחד מהם.

ה. מצא בסיס לכל מרחב עצמי של A.

ו. מצא מטריצות ממשיות 3×3 P ו- D , P הפיכה ו- D אלכסונית , כך שמתקיים $D=P^{-1}AP$. כמה מטריצות D כאלה יש?

ריכוז תשובות

א. A ניתנת לליכסון עבור:

ב. הפולינום האופייני של A

ד. הערכים העצמיים

ריבוי אלגברי

ריבוי גיאומטרי

ה. הבסיסים

ו. D =

P =

<u>שאלה מס. 3</u> (20 נקודות)

יהי $V=\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית $\langle v_1,v_2\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3$

כאשר $v_2=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ ו- $v_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

יהיו $u_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו- $u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ויהי $U=Sp\{u_1,u_2\}$

א. בנה ל- U בסיס אורתונורמלי מהבסיס הסדור $\{u_1,u_2\}$ על יד תהליך גראם-שמידט.

ב. מצא בסיס אורתונורמלי ל- $U^{\perp}$.

ג. יהי $v=\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\in V$. מצא את $w\in U^{\perp}$, $u\in U$, כך ש- $v=u+w$.

ד. יהיו v ו- u ו- w כמו בסעיף ג'. הוכח שלכל $x\in U$ מתקיים $\|w\|\le\|v-x\|$

ריכוז תשובות

א.

ב. בסיס ל- $U^{\perp}$

ג. $w =$ $u =$

<u>שאלה מס. 4</u> (15 נקודות)

לפניך שלוש טענות. אם טענה נכונה, הוכח אותה ואם היא לא נכונה, הפרך אותה על ידי דוגמא נגדית. במקרה שהטענה לא נכונה עליך להוכיח שהדוגמא שהבאת היא דוגמא נגדית.

א. כל שתי מטריצות ממשיות 3×3 אשר שקולות שורה וניתנות לליכסון הן דומות.

ב. במרחב הוקטורי $V=\mathbb{R}_3[x]$ של כל הפולינומים עם מקדמים ממשיים ומעלה 3 לכל היותר, הנוסחא הבאה מגדירה מכפלה פנימית

$\langle f,g\rangle = f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)$ כאשר $f,g\in V$.

ג. אם A היא מטריצה ריבועית ממשית כך ש- $A=adj(A)$ ו- $\det(A)\geq 0$ אז $\sqrt{\det(A)}$ הוא ערך עצמי של A. כאן $\det(A)$ מסמן את הדטרמיננטה של A.

<u>שאלה מס. 5</u> (15 נקודות)

הוכח את הטענות הבאות:

א. יהי V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית $<\ ,\ >$ מעל $\mathbb{R}$. יהיו $v,u \in V$,

$u \neq 0$ ו- $v \neq 0$. אם u ו- v תלויים לינארית אז $|\langle u,v\rangle|^2 = \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$

ב. אם A ו- B מטריצות $n \times n$, $n \geq 2$, כך ש- AB=0 אז $r(A)+r(B) \leq n$